Ejercicios de Ampliación Práctica de Variables Aleatorias Continuas

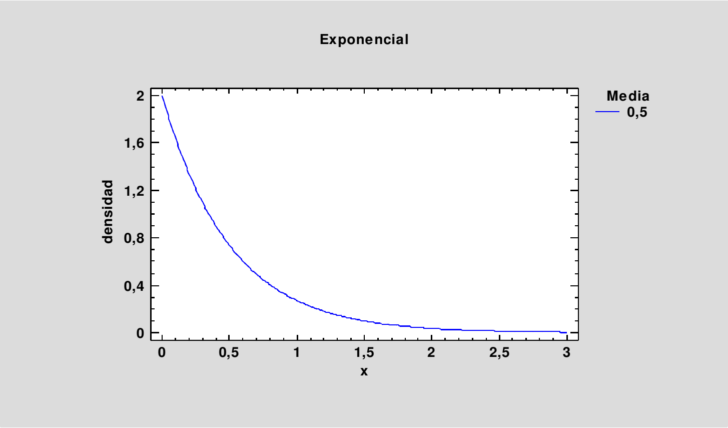
1. La magnitud de los terremotos, medidos en la escala Richter, en una determinada región sigue una distribución exponencial de parámetro 2 (la distribución exponencial responde a una función de densidad del tipo $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, donde λ es el *parámetro* de la distribución; la media de esta variable es $1/\lambda$).

a) Cuál es la magnitud media de los seísmos que se producen en dicha región?

La media es ½.

b) Visualiza la función de densidad de la variable. ¿Dirías que es una distribución asimétrica?

Describir + Ajuste de distribuciones+ Distribuciones de probabilidad. Escogemos "Exponencial". Por defecto, la media es 2. Con botón derecho + opciones de análisis, cambiamos el valor a 0,5. La función de densidad es



Es una distribución con una fuerte asimetría a la derecha: casi toda la probabilidad se concentra a la izquierda. Esto es lógico, ya que la mayor parte de los movimientos sísmicos son muy suaves (magnitud próxima a 0).

c) ¿En qué porcentaje de ocasiones se registran seísmos de magnitud entre 1 y 2?

Botón derecho + opciones de análisis, e introducimos los valores 1 y 2.

Área Cola Inferior (<)

Variable	*Dist. 1*	*Dist. 2*	*Dist. 3*	*Dist. 4*	*Dist. 5*
1	0,864665				
2	0,981684				

Como 0,981684-0,864665 = 0,117019, en un 11,7% de las ocasiones se registran seísmos de esas magnitudes.

d) ¿En qué porcentaje de ocasiones se registran seísmos de magnitud superior a 2?

Puesto que P(X>2)=0,0183156, se registran seísmos de esas magnitudes en el 1,83 % de las ocasiones.

e) Calcula los cuartiles, la mediana, y el percentil 90, e interprétalos.

El primer cuartil es el valor “a” tal que P(X<a)=0,25. Para calcularlo, botón derecho + botón de “tablas y gráficos”, y activamos la opción “distribuciones acumuladas inversas”. Desde esta última ventana, botón derecho e introducimos 0,25. El valor pedido es 0,1438410362. El 25% de los seísmos más débiles está por debajo de ese valor. Para la mediana, botón derecho e introducimos 0,5; para el tercer cuartil, 0,75, y para el percentil 90, 0,9.

FDA Inversa
Distribución: Exponencial

FDA	*Dist. 1*	*Dist. 2*	*Dist. 3*	*Dist. 4*	*Dist. 5*
0,25	0,1438410362				
0,5	0,3465735903				
0,75	0,6931471806				
0,9	1,151292546				

Por ejemplo, el percentil 90 se podría interpretar diciendo que sólo el 10% de los movimientos supera la magnitud 1,15.

f) ¿Por encima de qué magnitud se sitúa el 15% de seísmos más fuertes?

Es el percentil 85. El valor es 0,9485599924

f) ¿Cuál es la probabilidad de que de cinco movimientos sísmicos registrados a lo largo del año, se haya superado la media en al menos dos de ellos?

La probabilidad de que un seísmo tenga una magnitud superior a la media, 0,5, es P(X>0,5)= 0,367879. La variable X=”número de ocasiones, de 5, en la que un seísmo supera la media”, es una binomial B(5; 0,367879). Se nos pide P(X>1). Elegimos la distribución binomial, e introducimos los valores “prob. Evento = 0,367879”, y “número de ensayos” = 5. La probabilidad pedida es 0,605393.

2. Las poblaciones de dos especies animales en competición, X e Y, pueden modelizarse a partir de distribuciones normales. En concreto, X se comporta como una distribución N(250, 30), e Y como N(300,10). ¿Con qué probabilidad sucederá que la población de X supere a la de Y? (NOTA: debes utilizar el hecho de que la resta de normales es también normal, es decir: si $X = N(\mu_1, \sigma_1)$, $Y = N(\mu_2, \sigma_2)$, entonces $X - Y = N(\mu_1 - \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$; además, en ese casto lo que necesitamos calcular es P(X-Y>0))

En este caso, X-Y=N(-50,31,62) (el valor 31.62 se obtiene como la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las desviaciones típicas de X e Y). Por lo tanto, Describir + Ajuste de distribuciones+ Distribuciones de probabilidad. Introducimos los valores anteriores, y calculamos la probabilidad de que la variable supere el valor 0. El valor de la probabilidad es 0,0569071.

3. En una región, se han observado determinadas subespecies X_1 y X_2 de una especie vegetal X. Si el número de ejemplares de X_1 sigue una distribución $N(500{,}30)$ y el número de ejemplares de X_2 sigue una $N(400{,}20)$:

a) ¿Qué distribución sigue el número de ejemplares de X? (NOTA: observa que el número de ejemplares de X es la suma de X_1 y X_2 y recuerda que la suma de normales es también normal; concretamente, si $X = N(\mu_1, \sigma_1)$, $Y = N(\mu_2, \sigma_2)$, entonces $X + Y = N(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$).

Normal de media 900 y desviación típica $\sqrt{1300}$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la población de X supere los 950 ejemplares?

8,275%.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la población de X esté por debajo de 800 ejemplares?

0,277%.

4. Se considera que el número de incendios y conatos anuales en una zona de España sigue una distribución normal de media 43 y desviación típica 12.

a) ¿Con qué probabilidad podemos esperar más de 50 incendios en dicha zona?

   $P(X>50)=0{,}279833$.

b) Con este modelo, ciertos servicios y ayudas se movilizan automáticamente cuando el número de incendios supera el percentil 85. ¿Por encima de qué número de incendios se estaría en esta situación?

   A partir de 55 incendios.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que se registren entre 40 y 60 incendios? ¿Y menos de 40?

   $P(40<X<60)= 0{,}92171-0{,}401292 = 0{,}520418$. $P(X<40)=0{,}40192$. Por lo tanto, porcentajes de 52,04% y 40,192%, respectivamente.

d) Proporciona un intervalo que contenga el número de incendios que cabe esperar en el 90% de los casos? (SUGERENCIA: un intervalo razonable que responde a la condición que se pide, es el comprendido entre los percentiles 5 y 95; trata de entender por qué).

   El percentil 95 es aprox. 63, y el percentil 5, 23. Por lo tanto, (23,63).